ESTIMASI DENSITAS KERNEL EPANECHNIKOV RATA - RATA RESAMPEL BOOTSTRAP UNTUK PENENTUAN WAKTU PANEN OPTIMAL TANAMAN RAMI (*Boehmeria nivea* L. Gaudich)

oleh

SARASWATI

M0105063

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan

memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURAKARTA

2009

SKRIPSI

ESTIMASI DENSITAS KERNEL EPANECHNIKOV RATA - RATA RESAMPEL BOOTSTRAP UNTUK PENENTUAN WAKTU PANEN OPTIMAL TANAMAN RAMI (*Boehmeria nivea* L. Gaudich)

yang disiapkan dan disusun oleh

SARASWATI

M0105063

dibimbing oleh

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dra. Sri Sulistijowati H, M.Si	Titin Sri Martini, S.Si, M.Kom
NIP. 19690116 199402 2 001	NIP. 19750102 200812 2 001

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji

pada hari Rabu, tanggal 15 Juli 2009

dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Anggota Tim Penguji	Tanda Tangan
1. Drs. Kartiko, M.Si NIP. 19500715 198601 1 001	1. ……………….
2. Dra. Etik Zukhronah, M.Si NIP. 19661213 199203 2 001	2. ……………
3. Drs. Sutrima, M.Si NIP. 19661007 199302 1 001	3. ………………

Disahkan oleh

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan,	Ketua Jurusan Matematika,
Prof. Drs. Sutarno, M.Sc, Ph.D	Drs. Kartiko, M.Si
NIP. 19600809 198612 1 001	NIP. 19500715 198601 1 001

ABSTRAK

Saraswati, 2009. ESTIMASI DENSITAS KERNEL EPANECHNIKOV RATA - RATA RESAMPEL BOOTSTRAP UNTUK PENENTUAN WAKTU PANEN OPTIMAL TANAMAN RAMI (*Boehmeria nivea* L. Gaudich). Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret.

Kebutuhan kapas untuk industri tekstil di Indonesia sebagian besar masih didatangkan dari luar negeri. Salah satu usaha untuk mengurangi ketergantungan pada kapas adalah penggunaan serat alami yang berasal dari tanaman rami (*Boehmeria nivea* L. Gaudich) yang memiliki karakteristik mirip kapas dan dapat digunakan sebagai bahan baku tekstil. Untuk itu perlu meningkatkan produktivitas tanaman rami dengan memberikan hormon Giberelin dan kapasitas air penyiraman untuk merangsang pertumbuhan tanaman rami. Pada penelitian ini digunakan kombinasi perlakuan hormon Giberelin (GA_3) konsentrasi 175 ppm dan 200 ppm serta kapasitas air penyiraman 300 ml, 450 ml dan 600 ml.

Tujuan dari penulisan ini adalah menentukan waktu panen optimal tanaman rami dan menentukan perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami. Waktu panen optimal tanaman rami ditentukan melalui rata-rata resampel bootstrap terbesar dan plot estimasi fungsi densitas kernel Epanechnikov. Sedangkan perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami ditentukan melalui batas-batas interval konfidensi bootstrap persentil, cakupan probabilitas, dan rentang interval konfidensi.

Hasil penelitian yang diperoleh adalah waktu panen optimal tanaman rami dengan perlakuan hormon Giberelin (GA_3) dan kapasitas air penyiraman adalah 5 minggu. Sedangkan perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami adalah hormon Giberelin konsentrasi 200 ppm dan kapasitas air penyiraman 600 ml.

Kata kunci : rami, bootstrap, kernel Epanechnikov, interval konfidensi bootstrap persentil

ABSTRACT

Saraswati, 2009. EPANECHNIKOV KERNEL DENSITY ESTIMATION OF BOOTSTRAP RESAMPLE'S MEAN IN DETERMINING THE OPTIMUM HARVEST TIME OF RAMI (*Boehmeria nivea* L. Gaudich). Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

Requirement of cotton for textile industry in large parts still imported from foreign. One of the effort for reducing dependency of the cotton is usage natural fiber which is came from rami (*Boehmeria nivea* L. Gaudich) which has characteristic like a cotton and it can be used for textile materials. For increasing the rami's productivity, Giberelin hormone and watering capacity are given to stimulate rami's growth. In this research, Giberelin hormone (GA_3) with 175 ppm and 200 ppm concentration, and watering capacity 300 ml, 450 ml and 600 ml are used as the treatments.

The aims of this research are to determine the optimum harvest time of rami and to determine the treatment that optimize rami's growth. The optimum harvest time of rami is determined by using the plots of Epanechnikov kernel density estimation and the greatest bootstrap resample's means. While the treatment that optimize rami's growth is determined by using confidence interval of bootstrap percentile, coverage probability and confidence interval of bootstrap percentile's range.

The result of this research is the optimum harvest time of rami with Giberelin (GA_3) and watering capacity as the treatments is 5 weeks. While the treatment that optimize rami's growth is Giberelin hormone with 200 ppm concentration and watering capacity 600 ml.

Key words : rami, bootstrap, Epanechnikov kernel, confidence interval of bootstrap percentile

MOTO

Sesungguhnya setelah kesulitan itu ada kemudahan

(QS. Alam Nasyrah : 6)

"Jika engkau di waktu sore maka janganlah engkau menunggu pagi, dan jika engkau di waktu pagi janganlah menunggu sore, dan pergunakanlah waktu sehatmu sebelum kamu sakit dan pergunakanlah waktu hidupmu sebelum kamu mati"

(HR. Bukhari)

PERSEMBAHAN

Karya ini penulis persembahkan untuk

- ♥ *Bapak, Ibu dan keluarga*

  Atas doa, kasih sayang, nasehat dan semangat yang diberikan.

- ♥ *Sahabat-sahabat penulis*

  Atas doa, dukungan, kebersamaan dan persahabatan selama ini.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, dengan segala ketergantungan kepada-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ”Estimasi Densitas Kernel Epanechnikov Rata-Rata Resampel Bootstrap untuk Penentuan Waktu Panen Optimal Tanaman Rami (*Boehmeria nivea* L. Gaudich)”. Dalam penyusunan skripsi ini penulis telah mendapat banyak masukan, bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak yang sangat bermanfaat baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada

1. Ibu Dra. Sri Sulistijowati H, M.Si dan Ibu Titin Sri Martini, S.Si, M.Kom selaku pembimbing I dan pembimbing II atas bimbingan dan motivasi yang diberikan selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Drs. Kartiko, M.Si atas bimbingan dan arahan materi yang diberikan selama penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Widya Mudyantini, M.Si dan Fauzi atas arahan tentang tanaman rami dan data tanaman rami yang diberikan kepada penulis.
4. Bapak, Ibu dan keluarga tercinta penulis, yang selalu memberikan doa, kasih sayang dan nasehatnya untuk penulis.
5. Kurnia Lutfi atas segala doa, semangat dan bantuannya untuk penulis.
6. Sahabat-sahabat penulis atas persahabatan dan kasih sayangnya selama ini.
7. Semua pihak yang telah membantu kelancaran penulisan skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pembaca.

Surakarta, Juli 2009

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR NOTASI

S	: ruang sampel
X	: variabel random
n	: ukuran sampel
$x_1, x_2, \ldots, x_n$	: sampel random berukuran *n*
$\bar{X}$	: rata-rata sampel
μ	: rata-rata populasi
$f(x)$	: fungsi densitas probabilitas dari *x*
$F(x)$	: fungsi distribusi komulatif dari *x*
$E(x)$	: harga harapan dari *x*
$Var(x)$	: variansi populasi dari *x*
Ω	: ruang parameter
$P(x)$	: peluang kejadian dari *x*
C_n	: interval konfidensi
α	: tingkat kepercayaan
$\approx$	: mendekati sama dengan
$\sum$	: sigma, operator penjumlahan
$\lvert x \rvert$	: harga mutlak dari *x*
$\lVert x \rVert$	: *norm* dari *x*
B	: jumlah ulangan resampel bootstrap
$x_b^{\,*}$	: resampel bootstrap
θ	: *tetha*, suatu parameter
$\hat{\theta}_b^*$	: rata-rata resampel bootstrap
$\bar{\theta}^*$	: rata-rata sampel bootstrap
$\hat{V}^*$	: variansi sampel bootstrap
$\hat{F}_n(x)$	: fungsi distribusi empiris dari *x*

h	: *bandwidth*, lebar jendela
$\hat{f}_h(.)$	: estimator densitas kernel dengan lebar jendela h
$o(.)$	*: little o*
$MSE(.)$	: *Mean Square Error*
$MISE(.)$	: *Mean Integrated Square Error*
$A\text{-}MISE(.)$	: *Asymtotic Mean Integrated Square Error*
$K(.)$	: fungsi kernel
$\underline{\theta}_{BP}$	: batas bawah interval konfidensi bootstrap persentil
$\overline{\theta}_{BP}$	: batas atas interval konfidensi bootstrap persentil

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Industri tekstil di Indonesia mengalami perkembangan yang pesat sehingga pada tahun 1992 menjadi penghasil devisa tertinggi diantara komoditas non migas dengan nilai ekspor sebesar US $ 3,5 milyar. Disisi lain, Indonesia sebagai negara agraris sampai saat ini masih mendatangkan kapas sebagai bahan baku industri tekstil sebanyak 92% - 95% dari kebutuhan nasional karena kapas dalam negeri hanya mampu memenuhi 5% - 8% dari kebutuhan tersebut (Sumarno, 1980). Salah satu upaya untuk mengurangi ketergantungan pada kapas adalah penggunaan serat alami yang berasal dari tanaman rami (*Boehmeria nivea* L. Gaudich) yang memiliki karakteristik mirip kapas dan dapat digunakan sebagai bahan baku tekstil (Buxton dan Greenhalg, 1989). Keunggulan lain dari rami adalah produktivitas per hektar yang jauh lebih tinggi dibandingkan dengan kapas, yaitu 5,6:1 (Sumarno, 1980).

Rami (*Boehmeria nivea* L. Gaudich) adalah jenis tanaman tropika yang sesuai dengan iklim Indonesia dan menghasilkan serat. Serat rami merupakan serat yang kuat dan tahan lama. Oleh karena itu, serat rami menempati urutan nilai teratas di antara serat-serat alam nabati yang ada. Buxton dan Greenhalgh (1989) menyatakan bahwa serat rami juga dapat digunakan untuk bahan gorden, handuk, campuran wol, kain tenda, terpal, uang kertas dan kertas sigaret. Oleh sebab itu, tanaman rami perlu mendapat perhatian untuk diperluas pengembangannya sehingga prospeknya sangat cerah.

Menurut Dempsey (1963), kriteria siap panen untuk tanaman rami adalah (1) tanaman sudah berhenti tumbuh (tumbuh optimal) atau laju pertumbuhan tingginya berkurang, (2) separuh dari batang sudah berwarna coklat muda dan (3) muncul tunas-tunas di permukaan tanah. Pemanenan pertama dapat dilakukan setelah tanaman berumur 2 bulan.

Melihat potensi serat tanaman rami yang cukup tinggi, maka diperlukan usaha untuk peningkatan produktivitas tanaman rami. Salah satu alternatif peningkatan produktivitas tanaman rami yang dicoba adalah dengan pemberian hormon tertentu untuk mempercepat pertumbuhan tanaman rami tersebut. Penelitian yang dilakukan sebelumnya adalah pemberian hormon Giberelin (GA_3) untuk mempengaruhi pertumbuhan tanaman rami (Mudyantini, 2008). Dalam penelitian tersebut waktu pertumbuhan tanaman rami untuk siap dipanen adalah 6 minggu. Sastrosupadi dan Isdijoso (1992) menyatakan bahwa rami tergolong tanaman yang memiliki pertumbuhan vegetatif cepat karena setiap 2 bulan sekali harus dipanen atau dipotong. Berdasarkan sifat itu, rami membutuhkan air yang cukup tersedia sepanjang tahun serta tanah yang subur dan gembur. Karena itu Fauzi (2009) mencoba untuk memberikan perlakuan dengan hormon Giberelin (GA_3) dan kapasitas air penyiraman pada tanaman rami. Data yang akan digunakan dalam skripsi ini adalah data pertumbuhan tanaman rami hasil penelitian dari Fauzi (2009).

Penelitian ini bertujuan menentukan waktu panen optimal tanaman rami. Metode yang digunakan adalah metode statistik nonparametrik. Metode ini tidak memerlukan asumsi untuk memperoleh informasi dari data yang tersedia. Salah satu metode statistik nonparametrik yang digunakan adalah estimasi fungsi densitas menggunakan kernel (Hardle, 1990). Apabila ukuran data yang digunakan kecil ($n < 30$), akurasi dari estimasi fungsi densitas kernel kurang akurat, maka diperlukan konsep untuk menyelesaikan permasalahan ini. Konsep yang dapat digunakan adalah metode bootstrap yang dikenal dengan metode resampel (Efron dan Tibshirani, 1993). Metode ini menganggap bahwa sampel berdistribusi empiris yang kemudian dianggap sebagai populasi dan dari populasi tersebut dapat dilakukan resampel. Resampel dengan metode bootstrap bertujuan untuk memperbesar ukuran sampel sehingga estimasi fungsi densitas dapat mewakili data sebenarnya.

Pada penelitian ini akan digunakan estimasi fungsi densitas melalui fungsi kernel Epanechnikov. Hardle (1990) menyatakan bahwa kernel Epanechnikov merupakan kernel yang mempunyai laju konvergensi lebih cepat menuju nilai yang diestimasi dibanding kernel yang lainnya. Selanjutnya estimasi fungsi densitas yang diperoleh akan diterapkan pada pertumbuhan tanaman rami. Penelitian yang telah dilakukan sebelumnya adalah menerapkan estimasi fungsi densitas melalui fungsi kernel Triangular pada pertumbuhan tanaman jarak pagar (Yanuarika, 2008).

Selain menentukan waktu optimal pertumbuhan tanaman rami untuk siap dipanen, akan ditentukan perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami. Metode yang digunakan adalah dengan mengkonstruksi suatu interval konfidensi. Jika diharapkan hasil estimasi parameter mendekati nilai yang sebenarnya, maka diperlukan batas-batas keakuratan hasil estimasi yang disajikan dalam bentuk estimasi interval konfidensi. Efron dan Tibshirani (1993) menurunkan beberapa interval konfidensi untuk suatu parameter, dimana salah satu interval konfidensi yang mudah dihitung adalah interval konfidensi bootstrap persentil. Dari interval konfidensi bootstrap persentil yang diperoleh, dapat diukur tingkat akurasi dan ketepatan estimasi titiknya. Tingkat akurasi interval konfidensi bootstrap persentil diukur dengan menghitung nilai cakupan probabilitas. Sedangkan ketepatan estimasi titik diukur dengan menghitung rentang interval konfidensi bootstrap persentil. Selanjutnya batas-batas interval konfidensi bootstrap persentil, cakupan probabilitas dan rentang interval konfidensi yang diperoleh akan digunakan untuk menentukan perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, disusun perumusan masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana menentukan estimasi densitas pertumbuhan tanaman rami menggunakan kernel Epanechnikov dengan bantuan bootstrap?
2. Bagaimana menentukan waktu panen optimal tanaman rami melalui estimasi fungsi densitas kernel Epanechnikov?

3. Bagaimana menentukan perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami berdasarkan interval konfidensi bootstrap persentil, cakupan probabilitas dan rentang interval konfidensi?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini sebagai berikut.

1. Menentukan resampel data dengan menggunakan metode bootstrap.
2. Menentukan estimasi densitas pertumbuhan tanaman rami menggunakan kernel Epanechnikov.
3. Menentukan waktu panen optimal pertumbuhan tanaman rami melalui estimasi fungsi densitas.
4. Menentukan perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami berdasarkan interval konfidensi bootstrap persentil, cakupan probabilitas dan rentang interval konfidensi.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah.

1. Memberikan informasi bahwa perlakuan pemberian hormon Giberelin dan variasi kapasitas air penyiraman dapat mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami sehingga produktivitas dan efisiensi waktu panen tanaman rami sebagai bahan serat pengganti kapas bisa ditingkatkan.
2. Menambah pengetahuan dan wawasan tentang aplikasi metode bootstrap dan estimasi fungsi densitas menggunakan kernel Epanechnikov.

BAB II
LANDASAN TEORI

Ada dua subbab yang akan dibahas pada landasan teori ini, yaitu tinjauan pustaka dan kerangka pemikiran. Tinjauan pustaka berupa hasil penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti terdahulu yang disajikan dalam bentuk definisi, teorema dan pengertian yang berhubungan dengan pembahasan tentang rami, metode bootstrap dan estimasi fungsi densitas. Melalui kerangka pemikiran akan digambarkan langkah dan arah penulisan untuk mencapai tujuan penelitian.

2.1 Tinjauan Pustaka

2.1.1 Rami (*Boehmeria nivea* L.Gaudich)

Tanaman rami adalah tanaman serat nabati yang menghasilkan serat dari kulit kayunya. Tanaman rami (*Boehmeria nivea* L. Gaudich) diklasifikasikan sebagai berikut

Divisio	: Spermatophyta
Sub Divisio	: Angiospermae
Classis	: Dicotyledoneae
Ordo	: Urticales
Familia	: Urticaceae
Genus	: *Boehmeria*
Spesies	: *Boehmeria nivea* L. Gaudich.

Rami sebagai salah satu sumber kenekaragaman hayati adalah jenis tanaman tropis yang sesuai dengan iklim Indonesia. Rami bisa tumbuh di dataran rendah maupun perbukitan dengan ketinggian 100-1.500 dpl. Serat rami bersifat sangat halus, tahan lama, kuat dan kilatannya seperti sutera. Penyusutan serat rami lebih sedikit jika dibandingkan dengan kapas dan kekuatannya meningkat ketika dibasahi. Serat ini mampu menyerap air lebih tinggi jika dibandingkan dengan serat kapas. Serat rami digolongkan sebagai serat lunak yang tidak berlignin karena sangat sedikit kadar ligninnya (Brink dan Escobin, 2003).

2.1.2 Konsep Dasar Statistik

Ada beberapa konsep dasar statistik untuk menunjang materi dalam pembahasan penulisan skripsi ini. Konsep dasar yang diperlukan adalah pengertian variabel random, fungsi densitas probabilitas, fungsi distribusi kumulatif, harga harapan dan variansi. Definisi dan teorema mengenai konsep dasar statistik tersebut diambil dari Bain dan Engelhardt (1992).

Definisi 2.1. *Ruang sampel* (*sample space*)*, dinotasikan S adalah himpunan dari semua kejadian yang mungkin dalam suatu eksperimen.*

Definisi 2.2. *Variabel random X adalah fungsi yang memetakan setiap hasil yang mungkin e pada ruang sampel S dengan suatu bilangan real x, sedemikian hingga* $X(e) = x$.

Variabel random dibagi menjadi dua, yaitu variabel random diskrit dan variabel random kontinu. Perilaku variabel random dapat digambarkan melalui fungsi densitas probabilitas dan fungsi distribusi kumulatifnya.

Definisi 2.3. *Jika himpunan semua nilai yang mungkin dari variabel random X merupakan himpunan berhingga* $x_1, x_2, ..., x_n$ *atau* $x_1, x_2, ...$ *dengan n bilangan bulat positif maka X disebut variabel random diskrit. Fungsi*

$$f(x) = P[X = x] \quad \text{untuk } x = x_1, x_2, ...$$

menyatakan probabilitas setiap nilai x yang mungkin disebut fungsi densitas probabilitas diskrit (*discrete probability density function*).

Definisi 2.4. *Fungsi distribusi kumulatif* (*cumulative distribution function*) *dari variabel random diskrit X didefinisikan untuk setiap bilangan real x sebagai*

$$F(x) = P(X \le x).$$

Definisi 2.5. *Variabel random X disebut variabel random kontinu jika terdapat fungsi f*(*x*) *yang merupakan fungsi densitas probabilitas dari X, sehingga fungsi distribusi kumulatifnya dapat dinyatakan dengan*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Sesuatu yang perlu diketahui dari suatu distribusi variabel random adalah pusat (*central*) distribusi yang didefinisikan sebagai harga harapan (*expected value*) dan variansi.

Definisi 2.6. *Jika X suatu variabel random diskrit dengan fungsi densitas probabilitas f*(*x*), *maka harga harapan dari X didefinisikan sebagai*

$$E(X) = \sum_{x} xf(x).$$

Definisi 2.7. *Jika X suatu variabel random kontinu dengan fungsi densitas probabilitas f*(*x*), *maka harga harapan dari X didefinisikan sebagai*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

dan variansi dari variabel random adalah

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2].$$

Teorema 2.1. *Variansi dari variabel random X dinyatakan dengan*

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

2.1.3 Sifat Estimator

Statistik merupakan suatu fungsi dari variabel random yang tidak tergantung pada parameter populasi. Pendugaan atau estimasi terhadap suatu parameter diperlukan karena nilai dari parameter biasanya tidak diketahui. Berikut diberikan definisi tentang estimator tak bias, estimator bias dan *Mean Square Error* (*MSE*) yang diambil dari Bain dan Engelhardt (1992).

Definisi 2.8. **S***tatistik* $T = l(X_1, X_2, ..., X_n)$ *yang digunakan untuk mengestimasi nilai dari* $\tau(\theta)$ *disebut estimator dari* $\tau(\theta)$ *dan nilai dari statistik* $t = l(x_1, x_2, ..., x_n)$ *disebut estimasi dari* $\tau(\theta)$.

Misal Ω ruang parameter yang menunjukkan himpunan seluruh kemungkinan nilai θ. Sifat dari estimator yang baik adalah tak bias.

Definisi 2.9. *Estimator T dikatakan estimator tak bias dari* $\tau(\theta)$ *jika*

$$E(T) = \tau(\theta)$$

untuk semua $\theta \in \Omega$. *Jika* $E(T)$ *tidak sama dengan* $\tau(\theta)$*, maka T dikatakan sebagai estimator bias dari* $\tau(\theta)$.

Definisi dari estimator bias sebagai berikut.

Definisi 2.10. *Jika T adalah estimator dari* $\tau(\theta)$*, maka bias dinyatakan dengan*

$$b(T) = E(T) - \tau(\theta)$$

dan Mean Squared Error (*MSE*) *dari T dinyatakan dengan*

$$MSE(T) = E[T - \tau(\theta)]^2.$$

Teorema 2.2. *Jika T adalah estimator dari* $\tau(\theta)$*, maka*

$$MSE(T) = Var(T) + [b(T)]^2.$$

MSE adalah jumlah dari variansi dengan bias kuadrat dan digunakan sebagai ukuran keakuratan suatu estimasi.

2.1.4 Metode Bootstrap

Metode bootstrap adalah metode simulasi data untuk keperluan inferensi statistik (Efron dan Tibshirani, 1993). Apabila bootstrap digunakan, maka inferensi dapat dilakukan tanpa membuat asumsi distribusi. Dalam bootstrap dilakukan resampling dengan pengembalian. Resampling dengan pengembalian ini membuat setiap resampel dapat mempunyai beberapa elemen dari sampel asli muncul lebih dari sekali dan mungkin beberapa tidak muncul sama sekali. Sampel disyaratkan identik dan independen. Langkah-langkah dalam prosedur bootstrap adalah sebagai berikut

1. Membangun distribusi empiris $\hat{F}_n(x)$ dari suatu sampel dengan menempatkan probabilitas *1/n* pada setiap x_i, dengan $i = 1,2, \ldots, n$.
2. Mengambil sampel random sederhana berukuran *n* dengan pengembalian dari fungsi distribusi empiris $\hat{F}_n(x)$ sebanyak *B* kali. Hal ini dinamakan sebagai resampel dan disebut x_b^*. Sampel random dengan *B* ulangan dari ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) adalah

$$\begin{array}{cccc} x_{11}^* & x_{21}^* & \cdots & x_{n1}^* \\ x_{12}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1B}^* & x_{2B}^* & \cdots & x_{nB}^* \end{array}$$

   Menurut Efron dan Tibshirani (1993), jumlah ulangan pada resampel bootstrap berkisar diantara nilai 25 – 200.
3. Menghitung statistik $\hat{\theta}$ yang diinginkan dari resampel yang disebut $\hat{\theta}_b^*$ sebanyak *B* kali.
4. Membangun distribusi empiris dari $\hat{\theta}_b^*$, dengan probabilitas masing-masing *1/B* pada setiap $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \ldots, \hat{\theta}_B^*$. Distribusi ini adalah estimator distribusi sampling $\hat{\theta}$ dan disebut $\hat{F}^*(\hat{\theta}^*)$. Selanjutnya distribusi tersebut dapat digunakan untuk melakukan inferensi tentang θ.

Jika $\hat{\theta}$ merupakan *mean* (rata-rata) hasil resampel, maka dapat ditentukan rata-rata dan variansi bootstrapnya yaitu

$$\bar{\theta}^* = \frac{\sum_{i=1}^{B} \hat{\theta}_i^*}{B} \quad \text{dan} \quad \hat{V}^* = \frac{\sum_{i=1}^{B} \left(\hat{\theta}_i^* - \bar{\theta}^*\right)^2}{B-1} \quad .$$

2.1.5 Estimasi Fungsi Densitas

Diasumsikan variabel random X kontinu, independen dan berdistribusi identik maka dinotasikan fungsi densitas $f(x)$ sebagai

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx .$$

Estimasi fungsi densitas adalah mengestimasi fungsi densitas dengan memberikan himpunan data observasi $\{X_i\}_{i=1}^n$. Estimasi fungsi densitas dapat dilakukan dengan pendekatan parametrik, yaitu data diasumsikan mempunyai distribusi tertentu. Pendekatan yang lain adalah nonparametrik, yaitu data tidak diasumsikan mempunyai distribusi tertentu. Estimasi fungsi densitas nonparametrik dapat dilakukan melalui histogram dan fungsi kernel (Hardle, 1990).

2.1.6 Estimasi Fungsi Densitas Kernel

Fungsi densitas merupakan karakteristik dasar yang menggambarkan perilaku variabel random *X*. Atas dasar itu estimasi fungsi densitas menjadi sangat penting. Salah satu pendekatan estimasi densitas adalah pendekatan nonparametrik (Hardle, 1990). Salah satu penduga densitas nonparametrik adalah fungsi densitas kernel K yang dinyatakan sebagai

$$K_h(x) = \frac{1}{n} K(\frac{1}{h})$$

dan bentuk kernel Epanechnikov adalah

$$K(t) = \frac{3}{4}\left(1 - t^2\right) I(|t| \leq 1)$$

dengan $I(|t| \leq 1)$ merupakan fungsi indikator yang bernilai 1 jika $|t| \leq 1$ dan 0 untuk yang lain. Sedangkan estimator fungsi densitas kernel *f*(*x*) dinyatakan sebagai

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(x - X_i) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \qquad (2.1)$$

dengan n adalah banyak data, h merupakan lebar jendela (*bandwidth*), X_i merupakan nilai variabel independen dalam data, x adalah nilai variabel independen yang akan diestimasi dan K adalah fungsi kernel yang digunakan.

Diasumsikan fungsi kernel K adalah fungsi densitas kontinu, terbatas, simetris di sekitar 0 dan berharga real. Kernel K memenuhi sifat-sifat:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx = 0$

3. $0 < \int_{-\infty}^{\infty} x^2 K(x)dx = K < \infty$

Menurut Hardle (1990), sifat-sifat estimator fungsi densitas kernel sebagai berikut.

Teorema 2.3. *Jika* $\hat{f}_h(x)$ *diberikan oleh persamaan* (*2.1*) *dan X variabel random identik, maka untuk* $n \to \infty$

$$E[\hat{f}_h(x)] \to f(x)\int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt = f(x),\ \textit{untuk}\ h \to 0\ \textit{dengan}\ t = \frac{x - X_i}{h}.$$

Teorema 2.4. *Jika* $\hat{f}_h(x)$ *diberikan oleh persamaan* (*2.1*), *maka*

1. $Bias[\hat{f}_h(x)] = \frac{h^2}{2} f''(x)\alpha(K) + o(h^2),\ \textit{untuk}\ h \to 0\ \textit{dengan}\ \alpha(K) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)dt.$

2. $Var[\hat{f}_h(x)] = (nh)^{-1} f(x)\|K\|_2^2 + o((nh)^{-1}), nh \to 0$ *dengan* $\|K\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt.$

Berdasarkan Teorema 2.4, variansi akan minimum jika *h* semakin besar. Hal ini berbanding terbalik dengan bias, bias akan minimum jika *h* semakin kecil. Jika nilai *h* terlalu besar akan menyebabkan estimasi densitas menjadi terlalu mulus (*oversmoothing*) dan jika nilai *h* terlalu kecil akan menyebabkan estimasi densitas menjadi tidak mulus (*undersmoothing*). Untuk mengatasi masalah ini dilakukan dengan cara memperkecil nilai *Mean Square Error* (*MSE*) terhadap *h*, yang memberikan kontrol antara bias kuadrat dan variansi. *MSE* merupakan hasil penjumlahan dari bias kuadrat dan variansi.

Teorema 2.5. *Jika* $\hat{f}_h(x)$ *diberikan oleh persamaan* (*2.1*), *maka MSE* dapat dinyatakan sebagai

$$MSE[\hat{f}_h(x)] = (nh)^{-1} f(x)\|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4}[f''(x)\alpha(K)]^2 + o(h^4) + o((nh)^{-1}).$$

Teorema 2.6. *Jika* $\hat{f}_h(x)$ *diberikan oleh persamaan* (*2.1*), *maka Mean Integrated Square Error* (*MISE*) dapat dinyatakan sebagai

$$MISE[\hat{f}_h(x)] = (nh)^{-1}\|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4}\|f''(x)\|_2^2 \alpha^2(K) + o(h^4) + o((nh)^{-1}).$$

Jika bagian yang berorder tinggi dari sisi kanan Teorema 2.6 yaitu $o(h^4) + o((nh)^{-1})$ diabaikan, maka dapat didefinisikan *Asymtotic Mean Integrated Square Error* (*A-MISE*), yaitu

$$A - MISE[\hat{f}_h(x)] \approx (nh)^{-1}\|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4}\|f''(x)\|_2^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)dt\right)^2.$$

Menentukan lebar jendela optimal h_{opt} dapat dilakukan dengan menurunkan *A-MISE* terhadap parameter *h*, diperoleh

$$\frac{\partial\left(A - MISE[\hat{f}_h(x)]\right)}{\partial h} \approx n^{-1}h^{-2}\|K\|_2^2 + h^3\|f''(x)\|_2^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)dt\right)^2 = 0$$

sehingga $h_{opt} = \left(\dfrac{\|K\|_2^2}{\|f''(x)\|_2^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)dt \right)^2 n} \right)$ atau $h_{opt} \approx n^{-\frac{1}{5}}$.

Lebar jendela optimal digunakan untuk mengestimasi fungsi densitas dari data sehingga dapat diperoleh estimator fungsi densitas kernel yang akan mewakili fungsi densitas data yang sebenarnya.

2.1.7 Interval Konfidensi Bootstrap Persentil

Distribusi empiris $\hat{F}^*(\hat{\theta}_b^{\,*})$ yang diperoleh dari hasil resampel bootstrap akan dikonstruksi menjadi interval konfidensi bootstrap persentil. Menurut Efron dan Tibshirani (1993), langkah-langkah dalam mengkonstruksi interval konfidensi bootstrap persentil adalah sebagai berikut.

1. Melakukan algoritma bootstrap seperti pada subbab 2.1.4 hingga terbentuk resampel bootstrap $\hat{\theta}_b^*$.
2. Misalkan $\hat{F}^*(\hat{\theta}_b^{\,*})$ fungsi distribusi empiris dari $\hat{\theta}_b^*$ dan tingkat konfidensi untuk interval persentil adalah (1-α) maka interval konfidensi bootstrap persentil (1-α) untuk θ dapat didefinisikan sebagai

$$(\hat{F}^{*-1}(\alpha/2), \hat{F}^{*-1}(1-\alpha/2)).$$

Nama persentil diambil dari fakta bahwa $\hat{F}^{*-1}(\alpha/2)$ adalah persentil ke-100$(\alpha/2)$ dan $\hat{F}^{*-1}(1-\alpha/2)$ merupakan persentil ke-100$(1-\alpha/2)$ maka interval konfidensi bootstrap persentil (1-α) untuk θ dapat dinyatakan sebagai

$$(\underline{\theta}_{BP}, \overline{\theta}_{BP}) = (\hat{F}^{*-1}(\alpha/2), \hat{F}^{*-1}(1-\alpha/2)).$$

2.1.8 Cakupan Probabilitas

Cakupan probabilitas merupakan salah satu ukuran akurasi dari interval konfidensi yang menunjukkan perbandingan antara interval yang mungkin memuat parameter θ yang diestimasi dengan seluruh interval.

Misal $X_1, \cdots, X_n$ adalah sampel random dari distribusi F dan $\theta = T(F)$ merupakan parameter yang diamati. Bila $C_n = C_n(X_1, \dots, X_n)$ adalah himpunan bagian dari $\Re$ dan hanya tergantung pada $X_1, \cdots, X_n$ dan

$$P(\theta \epsilon C_n) \geq 1 - \alpha$$

dengan α konstan dan memenuhi $0 < \alpha < 1$ maka C_n disebut interval konfidensi untuk θ pada level $1 - \alpha$. Cakupan probabilitas dari C_n adalah $P(\theta \in C_n)$. Interval konfidensi (1-α) dikatakan eksak apabila mempunyai cakupan probabilitas yang konvergen ke harga nominalnya yaitu (1-α) untuk $n \to \infty$
(Shao dan Tu, 1995).

2.2 Kerangka Pemikiran

Berdasarkan tinjauan pustaka yang diuraikan di atas, dapat dibuat kerangka pemikiran untuk menyelesaikan permasalahan yang telah dirumuskan. Estimasi fungsi densitas kernel diterapkan pada data pertumbuhan tanaman rami untuk menentukan waktu panen optimal tanaman rami. Data pertumbuhan tanaman rami meliputi jumlah tunas, jumlah daun dan tinggi batang tunas. Karena ukuran data yang diperoleh cukup kecil (n < 30), maka perlu dilakukan resampel dengan metode bootstrap. Proses resampel akan menghasilkan sampel bootstrap yang kemudian dapat dihitung rata - rata resampelnya. Pola distribusi dari rata - rata resampel tersebut dapat ditentukan melalui estimasi densitas kernel, fungsi kernel yang digunakan adalah kernel Epanechnikov. Kemudian dibuat plot estimasi untuk mengetahui waktu panen optimal tanaman rami. Waktu panen optimal tanaman rami juga dapat ditentukan melalui rata - rata sampel bootstrap terbesar dan variansi yang kecil. Selain menentukan waktu panen optimal tanaman rami, ditentukan perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami berdasarkan interval konfidensi bootstrap persentil, cakupan probabilitas dan rentang interval konfidensi. Analisis data dilakukan dengan menggunakan bantuan *software Minitab 13 for Windows* dan *software R 2.7.2 for Windows*.

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi kasus dengan mengaplikasikan kernel Epanechnikov pada data pertumbuhan tanaman rami yang telah diresampel dengan metode bootstrap. Hasil resampel bootstrap juga dikonstruksi menjadi suatu interval konfidensi. Data yang digunakan adalah data hasil penelitian dari Fauzi (2009). Penelitian dilakukan pada bulan Februari - Maret 2009 di *Green House* Fakultas Pertanian UNS. Data meliputi jumlah tunas, jumlah daun dan tinggi batang tunas. Ketiga variabel tersebut digunakan untuk menentukan waktu panen optimal tanaman rami dan menentukan perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami. Langkah - langkah yang dilakukan dalam penelitian ini sebagai berikut.

1. Pengumpulan data

   Dalam penelitian ini akan digunakan rancangan percobaan faktorial dengan dua faktor. Faktor pertama yaitu hormon Giberelin (GA_3) dengan 2 taraf yaitu 175 ppm dan 200 ppm. Faktor kedua yaitu ketersediaan air dengan 3 taraf yaitu dengan kapasitas air penyiraman 300, 450 dan 600 ml. Untuk setiap kombinasi perlakuan terdiri atas tiga ulangan.

   Dalam penelitian ini rhizoma rami dipilih yang seragam kemudian dipotong - potong sepanjang 10 cm, dengan tiap - tiap rhizoma memiliki satu mata tunas. Potongan rhizoma tersebut kemudian ditanam pada media tanah di dalam polibag sedalam 5 cm dengan posisi agak miring kemudian disiram air. Pemberian GA_3 dilakukan sekali sebelum penanaman. Masing-masing rhizoma disemprot dengan 3 variasi konsentrasi hormon GA_3 sebanyak 5 ml. Pemeliharaan dilakukan dengan penyiraman air 2 kali sehari setiap pagi dan sore dengan kapasitas 300, 450 dan 600 ml. Variabel yang diamati dalam penelitian ini adalah pertumbuhan jumlah tunas, jumlah daun dan tinggi batang tunas tanaman rami. Pengukuran dilakukan setiap 1 minggu sekali selama 8 minggu.

2. Analisa data

Variabel yang diamati adalah jumlah tunas, jumlah daun dan tinggi batang tunas tanaman rami. Data dari setiap variabel diresampel dengan metode bootstrap untuk memperbesar ukuran sampel. Selanjutnya dihitung rata - rata dan variansi sampel bootstrap. Waktu panen optimal tanaman rami dapat ditentukan dengan plot estimasi densitas kernel Epanechnikov serta rata-rata dan variansi sampel bootstrap. Selain menentukan waktu panen optimal tanaman rami, juga ditentukan perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami berdasarkan interval konfidensi bootstrap persentil, cakupan probabilitas dan rentang interval konfidensi. Analisis data dilakukan dengan menggunakan bantuan *software Minitab 13 for Windows* dan *software R 2.7.2 for Windows*.

BAB IV

PEMBAHASAN

Dalam mengestimasi fungsi densitas, ada dua macam pendekatan yang dilakukan yaitu parametrik dan nonparametrik. Pendekatan parametrik membutuhkan asumsi suatu distribusi untuk memperoleh informasi dari data yang tersedia. Padahal data pertumbuhan tanaman rami yang diperoleh belum diketahui distribusinya, sehingga digunakan metode pendekatan nonparametrik yang tidak memerlukan asumsi suatu distribusi tertentu. Salah satu metode pendekatan nonparametrik yang digunakan adalah estimasi fungsi densitas kernel (Hardle, 1990). Estimasi densitas kernel kurang akurat jika ukuran datanya kecil ($n < 30$) sehingga diperlukan resampel untuk memperbesar ukuran data. Metode resampel yang digunakan adalah resampel bootstrap. Pada pembahasan ini akan diterapkan estimasi fungsi densitas kernel pada data pertumbuhan tanaman rami. Dari plot estimasi fungsi densitas kernel dan rata-rata sampel bootstrap terbesar dapat ditentukan waktu panen optimal tanaman rami. Untuk mengetahui perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami ditentukan melalui interval konfidensi bootstrap persentil, cakupan probabilitas dan rentang interval konfidensi.

4.1 Deskripsi Data Pertumbuhan Tanaman Rami

Data diperoleh dari hasil penelitian tanaman rami dengan perlakuan hormon Giberelin dan kapasitas air penyiraman. Variabel yang diamati adalah pertumbuhan jumlah tunas, jumlah daun dan tinggi batang tunas. Dari setiap kombinasi perlakuan, data pada akhir pertumbuhan yaitu minggu ke-8 dianalisis dengan *Minitab 13 for Windows* untuk mengetahui apakah terdapat pengaruh interaksi antara hormon Giberelin dan penyiraman air terhadap pertumbuhan tanaman rami. Dari hasil analisis pada Lampiran 3 diperoleh hasil bahwa tidak terdapat pengaruh interaksi antara hormon Giberelin dan penyiraman air terhadap pertumbuhan tanaman rami. Jika dilihat dari masing-masing faktor pun yaitu hormon Giberelin dan penyiraman air juga tidak menunjukkan pengaruh terhadap pertumbuhan tanaman rami, sehingga pengambilan data yang akan diestimasi densitas kernel didasarkan pada perlakuan yang mempunyai rata-rata pertumbuhan tinggi. Untuk variabel jumlah tunas dan jumlah daun, data yang akan dianalisis adalah data kombinasi perlakuan hormon Giberelin dengan konsentrasi 200 ppm (G2) dan kapasitas air penyiraman 600 ml (A3). Untuk variabel tinggi batang tunas digunakan data kombinasi perlakuan hormon Giberelin dengan konsentrasi 200 ppm (G2) dan kapasitas air penyiraman 450 ml (A2). Jumlah data pertumbuhan tiap variabel sebanyak 3 ulangan dan diukur setiap 1 minggu sekali selama 8 minggu.

4.2 Resampel Data dengan Metode Bootstrap

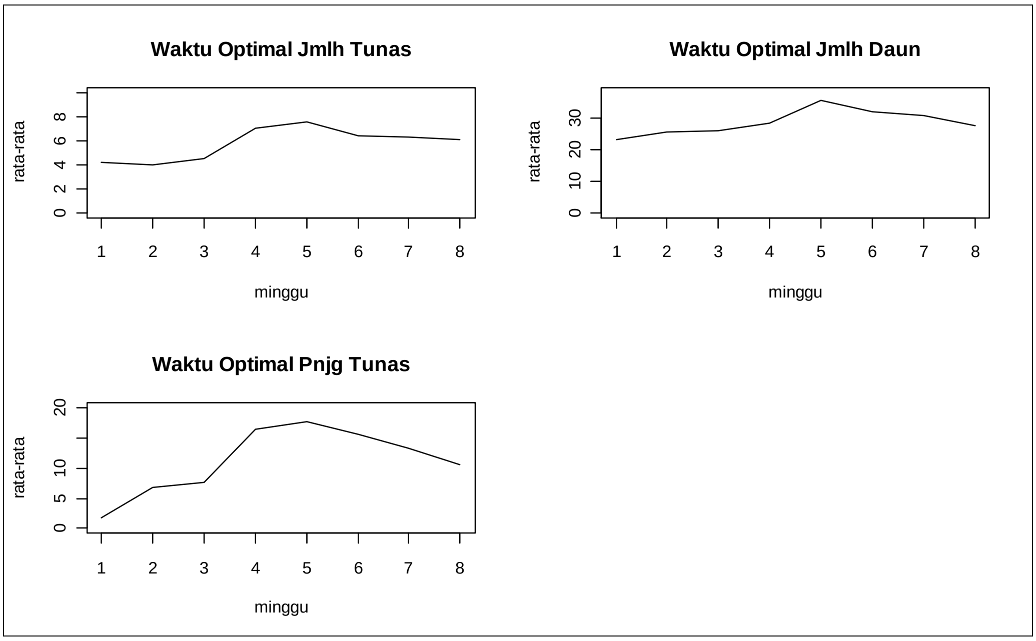
Ukuran data pertumbuhan tanaman rami yang diperoleh dari penelitian cukup kecil sehingga estimasi densitas kernel kurang akurat dan belum dapat mewakili densitas data sebenarnya, sehingga diperlukan resampel dengan metode bootstrap untuk memperbesar ukuran data. Menurut Efron dan Tibshirani (1993), jumlah ulangan pada resampel bootstrap berkisar diantara nilai 25 – 200, sehingga peneliti memutuskan untuk mengambil ulangan resampel sebesar 200.

Resampel data pertumbuhan tanaman rami dihitung dengan bantuan *software R 2.7.2 for Windows*. Program resampel data dapat dilihat di Lampiran 4. Data pertumbuhan tanaman rami diresampel sebanyak 200 kali. Dari setiap hasil resampel tersebut kemudian dihitung rata-rata dan variansi sampel bootstrap untuk setiap variabel yang disajikan pada Tabel 4.1. Dari rata - rata sampel bootstrap yang terbesar dapat ditentukan waktu optimal pertumbuhan tanaman rami untuk siap dipanen.

Tabel 4.1 Rata-rata dan variansi bootstrap pertumbuhan tanaman rami

Pengamatan minggu ke-	Jumlah Tunas		Jumlah Daun		Tinggi batang tunas	
	Rata-rata	Variansi	Rata-rata	Variansi	Rata-rata	Variansi
1	4.14	1.98	23.07	4.79	1,85	0,22
2	3.98	1.64	25.59	63.02	6,88	7,49
3	4.54	2.43	25.99	46.75	7,65	2,85
4	7.01	2.63	28.30	122.34	16,40	0,85
5	7.59	2.98	35.54	61.96	17,79	0,66
6	6.36	0.85	31.91	115.37	15,56	4,71
7	6.29	1.03	30.73	122.78	13,29	8,89
8	6.09	4.77	27.51	77.12	10,63	5,73

Dari setiap rata-rata sampel bootstrap variabel pengamatan pada Tabel 4.1 dapat dibuat plot untuk mengetahui waktu optimal pertumbuhan tanaman rami berdasarkan rata-rata resampel bootstrap terbesar. Plot waktu optimal tersebut disajikan pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Plot waktu optimal pertumbuhan tanaman rami berdasarkan rata-rata resampel boostrap terbesar

Dari Tabel 4.1 dan Gambar 4.1 dapat dilihat bahwa rata – rata resampel bootstrap terbesar untuk semua variabel berada pada pertumbuhan minggu ke-5 yaitu 7.59 untuk variabel jumlah tunas, 35.54 untuk variabel jumlah daun dan 17.79 untuk variabel tinggi batang tunas. Kesimpulan yang diperoleh menunjukkan bahwa waktu optimal pertumbuhan tanaman rami untuk semua variabel pengamatan berdasarkan rata-rata resampel bootstrap terbesar adalah pada minggu ke-5.

4.3 Estimasi Fungsi Densitas Kernel Epanechnikov

4.3.1 Pemilihan Bandwidth Optimal

Dalam estimasi fungsi densitas kernel, *bandwidth* (lebar jendela) merupakan parameter yang perlu diestimasi. Lebar jendela optimal digunakan untuk mengestimasi fungsi densitas dari data sehingga diperoleh estimator densitas kernel yang akan mewakili densitas data sebenarnya.

Berdasarkan Teorema 2.6, lebar jendela optimal diperoleh dengan meminimalkan *Asymtotic Mean Integrated Square Error* (*A-MISE*) terhadap *h*, yaitu $h_{opt} \approx n^{-\frac{1}{5}}$ (Hardle, 1990). Data yang akan diestimasi adalah data yang berasal dari hasil resampel bootstrap, sehingga jika diketahui *B* adalah banyak ulangan resampel bootstrap yaitu diambil 200, maka dengan pendekatan lebar jendela optimal tersebut diperoleh h_{opt} untuk semua variabel adalah $h_{opt} \approx (B)^{-\frac{1}{5}} \approx (200)^{-\frac{1}{5}} \approx 0.367$.

4.3.2 Estimasi Fungsi Densitas Kernel Epanechnikov Pertumbuhan Tanaman Rami

Dari subbab 2.1.6, estimator densitas kernel dapat dinyatakan sebagai $\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$, dengan lebar jendela *h*. Karena data yang digunakan merupakan rata-rata hasil resampel bootstrap, maka fungsi densitas kernel menjadi $\hat{f}_{h,B}(\bar{x}^*) = \frac{1}{Bh}\sum_{i=1}^{B} K\left(\frac{\bar{x}^* - \bar{X}_i^*}{h}\right)$, dengan *B* adalah banyak ulangan resampel bootstrap yaitu 200, *h* merupakan lebar jendela (*bandwidth*), $\bar{X}_i^*$ merupakan nilai variabel independen hasil rata-rata resampel bootstrap, $\bar{x}^*$ adalah nilai variabel independen yang akan diestimasi dan *K* adalah fungsi kernel yang digunakan. Fungsi kernel yang digunakan adalah kernel Epanechnikov dengan bentuk $K(t) = \frac{3}{4}\left(1 - t^2\right) I(|t| \le 1)$ dimana $t = \frac{\bar{x}^* - \bar{X}_i^*}{h}$, maka estimator fungsi densitas kernel Epanechnikov pada data pertumbuhan tanaman rami adalah

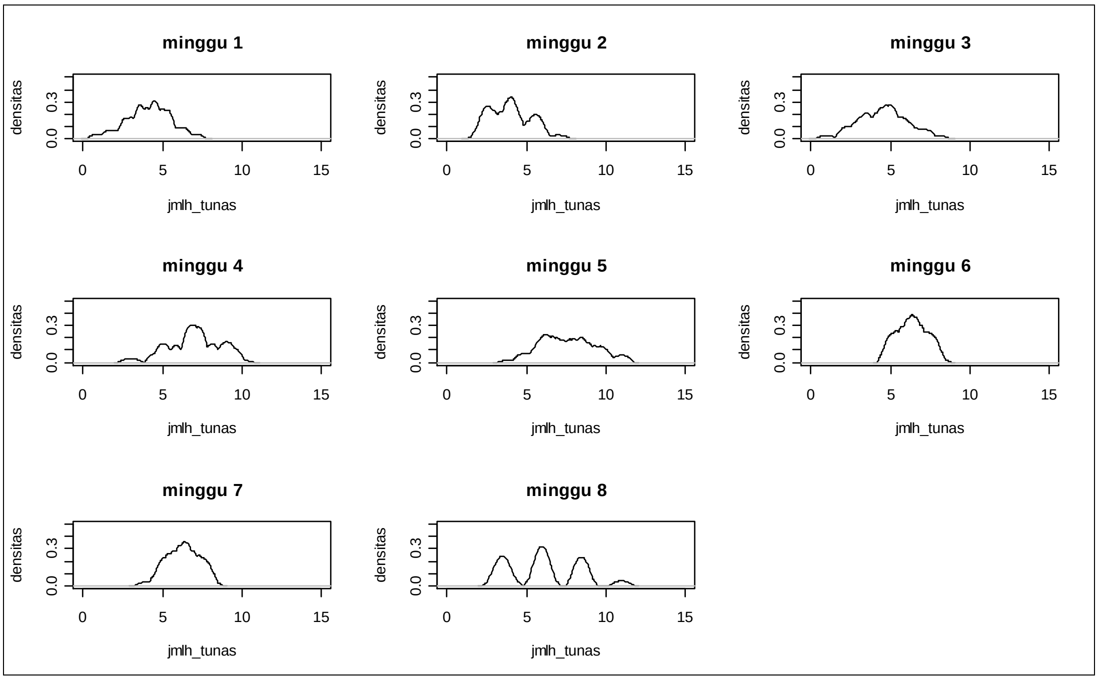
$$\hat{f}_{h,B}(\bar{x}^*) = \frac{1}{Bh}\sum_{i=1}^{B}\left(\frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{\bar{x}^* - \bar{X}_i^*}{h}\right)^2\right) I\left(\left|\frac{\bar{x}^* - \bar{X}_i^*}{h}\right| \le 1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{200(0.367)} \sum_{i=1}^{200} \left(\frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{\bar{x}^* - \bar{X}_i^*}{0.367} \right)^2 \right) I \left(\left| \frac{\bar{x}^* - \bar{X}_i^*}{0.367} \right| \leq 1 \right) \right)$$

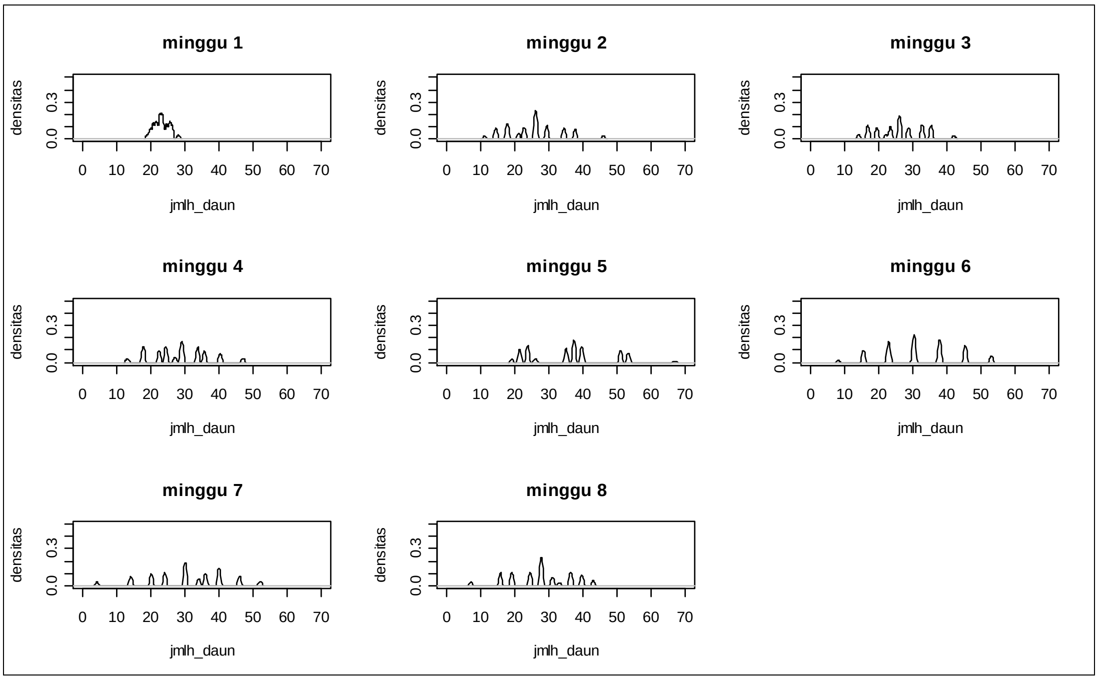
$$= \frac{1}{73.4} \sum_{i=1}^{200} \left(\frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{\bar{x}^* - \bar{X}_i^*}{0.367} \right)^2 \right) I \left(\left| \frac{\bar{x}^* - \bar{X}_i^*}{0.367} \right| \leq 1 \right) \right) .$$

4.3.3 Plot Estimasi Fungsi Densitas Kernel Epanechnikov Pertumbuhan Tanaman Rami

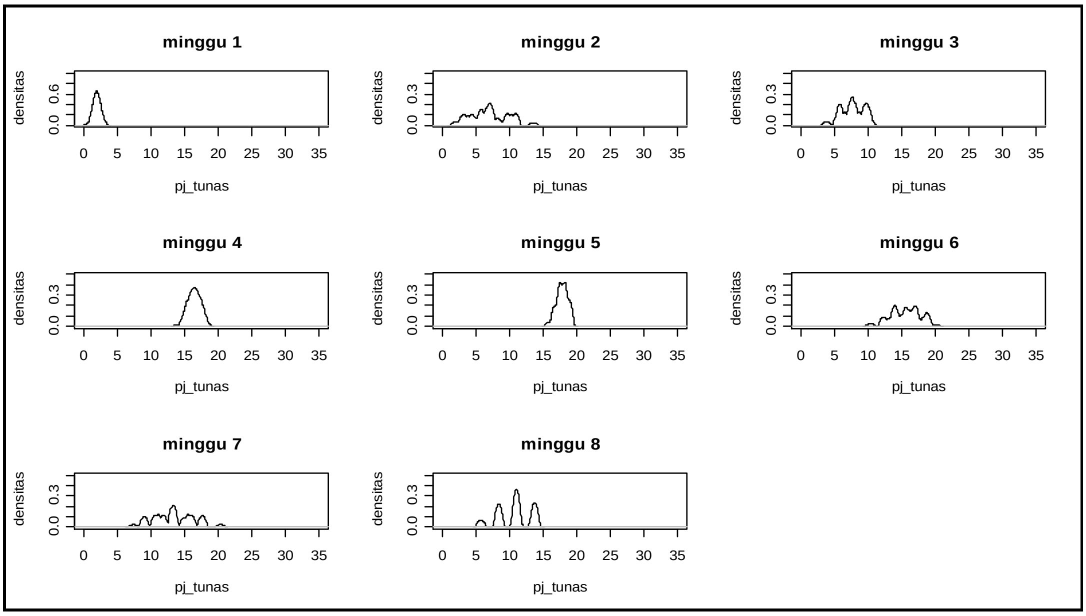
Plot estimasi fungsi densitas menggunakan kernel Epanechnikov dapat diperoleh dengan bantuan *software R 2.7.2 for Windows*. Program plot estimasi fungsi densitas menggunakan kernel Epanechnikov dapat dilihat pada Lampiran 6. Plot yang dihasilkan disajikan pada Gambar 4.2, Gambar 4.3 dan Gambar 4.4.



Gambar 4.2 Plot estimasi fungsi densitas kernel Epanechnikov pertumbuhan tanaman rami variabel jumlah tunas



Gambar 4.3 Plot estimasi fungsi densitas kernel Epanechnikov pertumbuhan tanaman rami variabel jumlah daun



Gambar 4.4 Plot estimasi fungsi densitas kernel Epanechnikov pertumbuhan tanaman rami variabel tinggi batang tunas

Dari Gambar 4.2 terlihat bahwa rata-rata pertumbuhan jumlah tunas dari pengamatan minggu ke-1 sampai ke-5 berjalan dari kiri ke kanan semakin besar, kemudian tidak mengalami peningkatan lagi setelah pengamatan minggu ke-5. Demikian juga dari Gambar 4.3 dan Gambar 4.4 terlihat bahwa rata-rata pertumbuhan jumlah daun mengalami peningkatan mulai dari pengamatan minggu ke-1 sampai ke-5, kemudian tidak mengalami peningkatan lagi setelah pengamatan minggu ke-5. Kesimpulan yang diperoleh dari Gambar 4.1, Gambar 4.2 dan Gambar 4.3 menunjukkan bahwa waktu optimal pertumbuhan tanaman rami variabel jumlah tunas, jumlah daun dan tinggi batang tunas adalah pada minggu ke-5.

4.4 Waktu Panen Optimal Tanaman Rami

Hasil yang diperoleh dari rata-rata resampel bootstrap Tabel 4.1, plot waktu optimal berdasarkan rata-rata resampel bootstrap pada Gambar 4.1 dan plot estimasi fungsi densitas menggunakan kernel Epanechnikov untuk variabel pengamatan jumlah tunas, jumlah daun dan tinggi batang tunas menunjukkan kesimpulan yang sama. Kesimpulan yang diperoleh menunjukkan bahwa waktu panen optimal tanaman rami adalah 5 minggu.

Hasil penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Mudyantini (2008) dengan perlakuan hormon Giberelin (GA_3), tanaman rami membutuhkan waktu siap panen 6 minggu. Dengan kombinasi perlakuan hormon Giberelin (GA_3) dan kapasitas air penyiraman, tanaman rami bisa lebih cepat untuk siap dipanen, yaitu dengan waktu 5 minggu. Sedangkan menurut Sastrosupadi dan Isdijoso (1992) pada umumnya tanaman rami dapat dipanen setelah tanaman berumur 2 bulan. Hal ini menunjukkan bahwa penambahan perlakuan teknik penyiraman dengan memperhatikan kapasitas penyiraman dapat mempercepat waktu panen tanaman rami.

4.5 Interval Konfidensi Bootstrap Persentil

Dari hasil yang diperoleh dari pembahasan subbab 4.4, waktu optimal pertumbuhan tanaman rami untuk siap dipanen adalah 5 minggu. Sehingga data yang akan digunakan untuk mengkonstruksi interval konfidensi bootstrap persentil adalah data kombinasi perlakuan hormon Giberelin dan variasi ketersediaan air pada minggu ke-5.

Jika B adalah jumlah resampel bootstrap yaitu ulangan yang digunakan adalah 200 dan $\hat{\theta}_b^*$, dengan b=1,2,…, B adalah rata-rata tiap resampel, maka $\hat{F}^{*-1}(\alpha/2)$ adalah nilai urutan ke-200($\alpha/2$) sedangkan $\hat{F}^{*-1}(1-\alpha/2)$ adalah nilai urutan ke-200($1-\alpha/2$). Jadi jika diberikan $\alpha = 0.05$ maka $\hat{F}^{*-1}(\alpha/2)$ dan $\hat{F}^{*-1}(1-\alpha/2)$ adalah nilai urutan ke-5 dan ke-195 dari resampel bootstrap.

Dari interval konfidensi bootstrap persentil yang diperoleh dapat ditentukan perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami. Perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami adalah perlakuan yang menghasilkan rata-rata pertumbuhan tinggi. Hasil analisis interval konfidensi bootstrap persentil dengan menggunakan *software R 2.7.2 for Windows* dapat dilihat pada Tabel 4.2, Tabel 4.3, dan Tabel 4.4.

Tabel 4.2 Interval konfidensi bootstrap persentil 95% variabel jumlah tunas

Hormon Giberelin	Kapasitas Air Penyiraman		
	A1 (300 ml)	A2 (450 ml)	A3 (600 ml)
G1 (175 ppm)	(2.325 ; 4)	(1 ; 7)	(3 ; 3.667)
G2 (200 ppm)	(1 ; 4.025)	(1 ; 2)	(4 ; 11)

Tabel 4.3 Interval konfidensi bootstrap persentil 95% variabel jumlah daun

Hormon Giberelin	Kapasitas Air Penyiraman		
	A1 (300 ml)	A2 (450 ml)	A3 (600 ml)
G1 (175 ppm)	(16 ; 28.075)	(14 ; 53)	(20.95 ; 29)
G2 (200 ppm)	(10 ; 36)	(13 ; 28)	(19 ; 53.68)

Tabel 4.4 Interval konfidensi bootstrap persentil 95% variabel tinggi batang tunas

Hormon	Kapasitas Air Penyiraman

Giberelin	A1 (300 ml)	A2 (450 ml)	A3 (600 ml)
G1 (175 ppm)	(3.87 ; 7.87)	(8.74 ; 13.3)	(5.07 ; 10.76)
G2 (200 ppm)	(6.38 ; 16)	(15.85 ; 19)	(3.95 ; 30)

Berdasarkan pada Tabel 4.2, perlakuan yang menghasilkan rata-rata pertumbuhan jumlah tunas paling tinggi adalah perlakuan G2A3. Untuk pertumbuhan jumlah daun, perlakuan yang menghasilkan rata-rata pertumbuhan jumlah daun yang tinggi berdasarkan Tabel 4.3 adalah perlakuan G2A3 dan G1A2. Sedangkan perlakuan yang menghasilkan rata-rata pertumbuhan tinggi batang tunas yang tinggi berdasarkan Tabel 4.4 adalah perlakuan G2A2 dan G2A3.

4.6 Cakupan Probabilitas Interval Konfidensi Bootstrap Persentil

Cakupan probabilitas merupakan salah satu ukuran akurasi dari interval konfidensi yang merupakan jumlahan dari parameter θ (dalam hal ini adalah μ) yang masuk dalam interval konfidensi dibagi dengan jumlah resampel bootstrap. Interval konfidensi dikatakan eksak jika cakupan probabilitas dari interval konfidensi mendekati harga nominalnya yang biasanya dengan harga $1-\alpha.$ Sehingga jika diberikan $\alpha = 0.05,$ maka perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami berdasarkan waktu optimal untuk siap dipanen yaitu minggu ke-5 adalah perlakuan dengan nilai cakupan probabilitas besar dan mendekati harga nominal yang diberikan $1-\alpha = 0.95.$ Berikut nilai cakupan probabilitas untuk variabel jumlah tunas, jumlah daun dan tinggi batang tunas yang disajikan pada Tabel 4.5, Tabel 4.6 dan Tabel 4.7.

Tabel 4.5 Nilai cakupan probabilitas variabel jumlah tunas

Hormon Giberelin	Kapasitas Air Penyiraman		
	A1 (300 ml)	A2 (450 ml)	A3 (600 ml)
G1 (175 ppm)	0.905	0.94	0.47
G2 (200 ppm)	0.935	0.695	0.92

Tabel 4.6 Nilai cakupan probabilitas variabel jumlah daun

Hormon Giberelin	Kapasitas Air Penyiraman		
	A1 (300 ml)	A2 (450 ml)	A3 (600 ml)
G1 (175 ppm)	0.935	0.92	0.855
G2 (200 ppm)	0.91	0.93	0.945

Tabel 4.7 Nilai cakupan probabilitas variabel tinggi batang tunas

Hormon Giberelin	Kapasitas Air Penyiraman		
	A1 (300 ml)	A2 (450 ml)	A3 (600 ml)
G1 (175 ppm)	0.915	0.925	0.925
G2 (200 ppm)	0.905	0.89	0.915

Dari Tabel 4.5 terdapat 2 perlakuan yang mempunyai nilai cakupan probabilitas yang mendekati harga nominal $1-\alpha=0.95$ yaitu G1A2 dan G2A1. Untuk data pertumbuhan variabel jumlah daun berdasarkan Tabel 4.6, terdapat 3 perlakuan yang mempunyai nilai cakupan probabilitas yang mendekati harga nominal $1-\alpha=0.95$ yaitu G1A1, G2A2 dan G2A3. Sedangkan untuk data pertumbuhan variabel tinggi batang tunas terdapat 2 perlakuan yang mempunyai nilai cakupan probabilitas yang mendekati harga nominalnya $1-\alpha=0.95$ yaitu G1A2 dan G1A3.

4.7 Rentang Interval Konfidensi Bootstrap Persentil

Selain dari interval konfidensi bootstrap persentil dan cakupan probabilitas, rentang interval konfidensi bootstrap persentil juga dapat digunakan sebagai pertimbangan untuk menentukan perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami. Jika rentang interval konfidensi bootstrap persentil semakin kecil, maka variansi rata-rata pertumbuhan juga semakin kecil. Dari Tabel 4.2, Tabel 4.3 dan Tabel 4.4 diperoleh rentang interval konfidensi bootstrap persentil untuk data pertumbuhan tanaman rami pada pengamatan minggu ke-5 yang disajikan pada Tabel 4.8, Tabel 4.9 dan Tabel 4.10.

Tabel 4.8 Rentang interval konfidensi bootstrap persentil variabel jumlah tunas

Hormon Giberelin	Kapasitas Air Penyiraman		
	A1 (300 ml)	A2 (450 ml)	A3 (600 ml)
G1 (175 ppm)	1.675	6	0.667
G2 (200 ppm)	3.025	1	7

Tabel 4.9 Rentang interval konfidensi bootstrap persentil variabel jumlah daun

Hormon Giberelin	Kapasitas Air Penyiraman		
	A1 (300 ml)	A2 (450 ml)	A3 (600 ml)
G1 (175 ppm)	12.075	39	8.05
G2 (200 ppm)	26	15	34.68

Tabel 4.10 Rentang interval konfidensi bootstrap persentil variabel tinggi batang tunas

Hormon Giberelin	Kapasitas Air Penyiraman		
	A1 (300 ml)	A2 (450 ml)	A3 (600 ml)
G1 (175 ppm)	4	4.56	5.69
G2 (200 ppm)	9.62	3.15	26.05

4.8 Perlakuan Yang Mengoptimalkan Pertumbuhan Tanaman Rami

Perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami untuk menghasilkan tanaman rami dengan waktu panen yang optimal (relatif singkat) dapat ditentukan dengan membandingkan interval konfidensi yang menghasilkan rata-rata pertumbuhan tinggi, mempertimbangkan nilai cakupan probabilitas yang mendekati nilai $(1-\alpha)$ yaitu 0.95 dan rentang interval konfidensi yang sempit.

Berdasarkan hasil pembahasan yang diperoleh pada subbab 4.5, 4.6 dan 4.7, perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami untuk variabel jumlah tunas, jumlah daun dan tinggi batang tunas dapat dilihat pada Tabel 4.11, Tabel 4.12 dan Tabel 4.13.

Dari Tabel 4.11, perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan jumlah tunas tanaman rami adalah perlakuan G2A3 (hormon Giberelin konsentrasi 200 ppm dan kapasitas air penyiraman 600 ml). Untuk pertumbuhan jumlah daun perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami berdasarkan Tabel 4.12 adalah perlakuan G2A3 (hormon Giberelin konsentrasi 200 ppm dan kapasitas air penyiraman 600 ml). Sedangkan untuk pertumbuhan tinggi batang tunas, perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami berdasarkan Tabel 4.13 adalah perlakuan G1A2 (hormon Giberelin konsentrasi 175 ppm dan kapasitas air penyiraman 450 ml).

Tunas merupakan komponen yang penting dalam pertumbuhan suatu tanaman. Hal ini didasarkan pada kenyataan bahwa banyaknya tunas yang muncul merupakan ukuran pertumbuhan yang paling mudah dilihat. Jadi, perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami adalah perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan jumlah tunas yaitu perlakuan hormon Giberelin konsentrasi 200 ppm dan kapasitas air penyiraman 600 ml.

Tabel 4.11 Perbandingan interval konfidensi bootstrap persentil, cakupan probabilitas dan rentang interval konfidensi variabel jumlah tunas

Perlakuan		Interval Konfidensi	Cakupan Probabilitas	Rentang Interval
Hormon Giberelin	Kapasitas Air Penyiraman			
G1 (175 ppm)	A1 (300 ml)	(2.325 ; 4)	0.905	1.675
G1 (175 ppm)	A2 (450 ml)	(1 ; 7)	0.94	6
G1 (175 ppm)	A3 (600 ml)	(3 ; 3.667)	0.47	0.667
G2 (200 ppm)	A1 (300 ml)	(1 ; 4.025)	0.935	3.025
G2 (200 ppm)	A2 (450 ml)	(1 ; 2)	0.695	1
G2 (200 ppm)	A3 (600 ml)	(4 ; 11)	0.92	7

Tabel 4.12 Perbandingan interval konfidensi bootstrap persentil, cakupan probabilitas dan rentang interval konfidensi variabel jumlah daun

Perlakuan	Interval	Cakupan	Rentang

Hormon Giberelin	Kapasitas Air Penyiraman	Konfidensi	Probabilitas	Interval
G1 (175 ppm)	A1 (300 ml)	(16 ; 28.075)	0.935	12.075
G1 (175 ppm)	A2 (450 ml)	(14 ; 53)	0.92	39
G1 (175 ppm)	A3 (600 ml)	(20.95 ; 29)	0.855	8.05
G2 (200 ppm)	A1 (300 ml)	(10 ; 36)	0.91	26
G2 (200 ppm)	A2 (450 ml)	(13 ; 28)	0.93	15
G2 (200 ppm)	A3 (600 ml)	(19 ; 53.68)	0.945	34.68

Tabel 4.13 Perbandingan interval konfidensi bootstrap persentil, cakupan probabilitas dan rentang interval konfidensi variabel tinggi batang tunas

Perlakuan		Interval Konfidensi	Cakupan Probabilitas	Rentang Interval
Hormon Giberelin	Kapasitas Air Penyiraman			
G1 (175 ppm)	A1 (300 ml)	(3.87 ; 7.87)	0.915	4
G1 (175 ppm)	A2 (450 ml)	(8.74 ; 13.3)	0.925	4.56
G1 (175 ppm)	A3 (600 ml)	(5.07 ; 10.76)	0.925	5.69
G2 (200 ppm)	A1 (300 ml)	(6.38 ; 16)	0.905	9.62
G2 (200 ppm)	A2 (450 ml)	(15.85 ; 19)	0.89	3.15
G2 (200 ppm)	A3 (600 ml)	(3.95 ; 30)	0.915	26.05

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab 4 dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Estimator fungsi densitas kernel Epanechnikov rata-rata resampel bootstrap untuk pertumbuhan tanaman rami variabel jumlah tunas, jumlah daun dan tinggi batang tunas dengan $h_{opt} \approx 0{,}367$ adalah

$$\hat{f}_{h,B}(\bar{x}^*) = \frac{1}{73.4}\sum_{i=1}^{200}\left(\frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{\bar{x}^* - \bar{X}_i^*}{0.367}\right)^2\right)I\left(\left|\frac{\bar{x}^* - \bar{X}_i^*}{0.367}\right| \leq 1\right)\right).$$

2. Waktu panen optimal tanaman rami berdasarkan rata-rata resampel bootstrap terbesar dan plot estimasi fungsi densitas kernel Epanechnikov variabel jumlah tunas, jumlah daun dan tinggi batang tunas adalah 5 minggu.
3. Perlakuan yang mengoptimalkan pertumbuhan tanaman rami berdasarkan batas-batas interval konfidensi bootstrap persentil, cakupan probabilitas dan rentang interval konfidensi pada pengamatan minggu ke-5 adalah hormon Giberelin konsentrasi 200 ppm dan kapasitas penyiraman 600 ml.

5.2 Saran

Bagi pembaca yang ingin membahas lebih jauh tentang estimasi fungsi densitas nonparametrik, penulis memberikan beberapa saran.

1. Perlu dilakukan estimasi fungsi densitas nonparametrik dengan metode yang lain, misalnya dengan regresi kernel.
2. Perlu dilakukan estimasi fungsi densitas kernel dengan fungsi kernel yang lain, misalnya kernel Box, Parzen, Quartic, Triweight dan yang lainnya.
3. Perlu dikembangkan estimasi fungsi densitas nonparametrik untuk kasus yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Brink, M. and R.P. Escobin. (2003). *Plant Resurces of South-East Asia No.17 Fibre Plants.* Prosea Foundation, Bogor.

Buxton, A. and P. Greenhalg. (1989). *Ramie, Short Live Curiosity or Fibre.* The Future Textile Outlook International, May, 1989. The Economist Intellegence Unit, London.

Dempsey, J. (1963). *Long Vegetables Fibre Development in South Vietnam and other Asian Countries*. Overseas Mission, Saigon.

Efron, B. and Tibshirani R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstraps*. Chapman and Hall Inc, New York.

Fauzi, S. (2009). *Pertumbuhan, Uji Tarik dan Mulur Serat Rami* (*Boehmeria nivea L. Gaudich*) *dengan Pemberian Asam Giberelat* (GA_3) *dan Variasi Ketersediaan Air*. Skripsi S1 Jurusan Biologi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam UNS, Surakarta.

Hardle, W. (1990). *Smoothing Technique with Implementation in S*. Springer Verlag, New York.

Mudyantini, W. (2008). *Pertumbuhan, Kandungan Selulosa, dan Lignin pada Rami* (*Boehmeria nivea L. Gaudich*) *dengan Pemberian Asam Giberelat* (GA_3). Biodiversitas, Vol. 9, No. 4, 267-274.

Sastrosupadi, A, dan Isdijoso. (1992). *Teknologi Budidaya Rami*. Balai Penelitian Tembakau dan Tanaman Serat, Malang.

Shao, J. and D. Tu . (1995). *The Jackknife and Bootstrap*. Springer Verlag New York Inc, New York.

Sumarno. (1980). *Suatu Studi Kemungkinan Penggunaan Serat Rami Sebagai Bahan Baku Tekstil*. Balai Penelitian dan Pengembangan Industri Tekstil, Bandung.

Yanuarika, I. (2008). *Penentuan Waktu Tanam Optimal Pembibitan Stek Tanaman Jarak Pagar* (*Jatropha curcas L*) *dengan Mengaplikasikan Kernel Triangular* *pada Rata-Rata Resampel Bootstrap*. Skripsi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam UNS, Surakarta.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Bukti teorema

Teorema 2.1. (*Bain dan Engelhardt, 1992*) *Variansi dari variabel random X dinyatakan dengan*

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Bukti :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[\left(X-\mu\right)^2\right] \\ &= E\left(X^2 - 2X\mu + \mu^2\right) \\ &= E\left(X^2\right) - 2E\left(X\right)\mu + \mu^2 \\ &= E\left(X^2\right) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E\left(X^2\right) - \mu^2 \end{aligned}$$

Teorema 2.2. (*Bain dan Engelhardt, 1992*) *Jika T estimator dari* $\tau(\theta)$*, maka*

$$MSE(T) = Var(T) + [b(T)]^2.$$

Bukti :

Berdasarkan Definisi 2.10 maka

$$\begin{aligned} MSE(T) &= E[T - \tau(\theta)]^2 \\ &= E[T - E(T) + E(T) - \tau(\theta)]^2 \\ &= E[T - E(T)]^2 + 2[E(T) - \tau(\theta)]\ [E(T) - E(T)] + [E(T) - \tau(\theta)]^2 \\ &= E[T - E(T)]^2 + [E(T) - \tau(\theta)]^2 \\ &= Var(T) + [b(T)]^2 \end{aligned}$$

Teorema 2.3. (*Hardle, 1990*) *Jika* $\hat{f}_h(x)$ *diberikan oleh persamaan* (*2.1*) *dan X variabel random identik, maka untuk* $n \to \infty$

$$E[\hat{f}_h(x)] \to f(x)\int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt = f(x),\ untuk.\ h \to 0\ dengan\ t = \frac{x - X_i}{h}.$$

Bukti :

$$E\left[\hat{f}_h(x)\right] = E\left(\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)\right),$$ substitusi $X_i = u$, maka

$$= E\left(\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - u}{h}\right)\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{h} K\left(\frac{x - u}{h}\right)\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{x - u}{h}\right) f(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{u - x}{h}\right) f(u)du$$

Substitusi $t = \frac{u - x}{h}$ maka $du = hdt$, sehingga

$$E\left(\hat{f}_h(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K(t) f(x + th)hdt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K(t) f(x + th)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K(t) f(x)dt, h \to 0$$

$$= f(x)\int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt$$

$$= f(x)$$

Teorema 2.4. (*Hardle, 1990*) *Jika* $\hat{f}_h(x)$ *diberikan oleh persamaan* (*2.1*), *maka*

1. $Bias[\hat{f}_h(x)] = \frac{h^2}{2} f''(x)\alpha(K) + o(h^2),\ untuk\ h \to 0\ dengan\ \alpha(K) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)dt$

2. $Var[\hat{f}_h(x)] = (nh)^{-1} f(x)\|K\|_2^2 + o((nh)^{-1}), nh \to 0\ dengan\ \|K\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt$

Bukti :

$$
\begin{aligned}
Bias\left[\hat{f}_h(x)\right] &= E\left(\hat{f}_h(x)\right) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t) f(x+th)dt - f(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\left[f(x) + \frac{th}{1!} f'(x) + \frac{t^2h^2}{2!} f''(x) + o(h^2)\right]dt - f(x) \\
&= f(x)\int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt + hf'(x)\int_{-\infty}^{\infty} tK(t)dt + \frac{h^2}{2} f''(x)\int_{-\infty}^{\infty} t^2K(t)dt + o(h^2) - f(x) \\
&= \frac{h^2}{2} f''(x)\int_{-\infty}^{\infty} t^2K(t)dt + o(h^2) \\
&= \frac{h^2}{2} f''(x)\alpha(K) + o(h^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var\left[\hat{f}_h(x)\right] &= Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[K_h\left(x - X_i\right)\right]\right], \text{ substitusi } X_i = u \text{ maka} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left[K_h(x-u)\right] = \frac{1}{n} Var\left[K_h(x-u)\right] \\
&= \frac{1}{n}\left\{E\left[K_h^2(x-u)\right] - \left(E\left[K_h(x-u)\right]\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left\{E\left[\frac{1}{h^2}K^2\left(\frac{x-u}{h}\right)\right] - \left[E\left[\frac{1}{h}K\left(\frac{x-u}{h}\right)\right]\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{h^2}\int_{-\infty}^{\infty} K^2\left(\frac{x-u}{h}\right)f(u)du - \left[\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-u}{h}\right)f(u)du\right]^2\right\}
\end{aligned}
$$

Substitusi $t = \frac{u-x}{h}$ maka *du=hdt,* sehingga

$$
\begin{aligned}
Var\left[\hat{f}_h(x)\right] &= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{h^2}\int_{-\infty}^{\infty}K^2(t)f(x+th)hdt-\left[\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}K(t)f(x+th)hdt\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}K^2(t)f(x+th)dt-\left[\int_{-\infty}^{\infty}K(t)f(x+th)dt\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}K^2(t)[f(x)+o(h)]dt-\left[(f(x)+o(h))\int_{-\infty}^{\infty}K(t)dt\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{nh}[f(x)+o(h)]\int_{-\infty}^{\infty}K^2(t)dt-\frac{1}{n}[f(x)+o(h)]^2 \\
&= \frac{1}{nh}f(x)\int_{-\infty}^{\infty}K^2(t)dt+o\left(\frac{1}{nh}\right) \\
&= (nh)^{-1}f(x)\|K\|_2^2+o((nh)^{-1}), nh\to 0
\end{aligned}
$$

Teorema 2.5. (*Hardle, 1990*) *Jika* $\hat{f}_h(x)$ *diberikan oleh persamaan* (*2.1*), *maka MSE* dapat dinyatakan sebagai

$$MSE[\hat{f}_h(x)]=(nh)^{-1}f(x)\|K\|_2^2+\frac{h^4}{4}[f''(x)\alpha(K)]^2+o(h^4)+0((nh)^{-1}).$$

Bukti :

$$
\begin{aligned}
MSE\left[\hat{f}_h(x)\right] &= Var\left[\hat{f}_h(x)\right]+\left[Bias\left[\hat{f}_h(x)\right]\right]^2 \\
&= (nh)^{-1}f(x)\|K\|_2^2+o((nh)^{-1})+\frac{h^4}{4}[f''(x)\alpha(K)]^2+o(h^4) \\
&= (nh)^{-1}f(x)\|K\|_2^2+\frac{h^4}{4}[f''(x)\alpha(K)]^2+o(h^4)+o((nh)^{-1})
\end{aligned}
$$

Teorema 2.6. (*Hardle, 1990*) *Jika* $\hat{f}_h(x)$ *diberikan oleh persamaan* (*2.1*), *maka Mean Integrated Square Error* (*MISE*) dapat dinyatakan sebagai

$$MISE[\hat{f}_h(x)] = (nh)^{-1}\|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4}\|f''(x)\|_2^2\alpha^2(K) + o(h^4) + 0((nh)^{-1}).$$

Bukti :

$$MISE\left[\hat{f}_h(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} MSE\left[\hat{f}_h(x)\right]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{(nh)^{-1} f(x)\|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4}\left[f''(x)\alpha(K)\right]^2 + o(h^4) + o((nh)^{-1})\right\}dx$$

$$= (nh)^{-1}\|K\|_2^2\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \frac{h^4}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f''(x)\right)^2 dx\alpha^2(K) + \int_{-\infty}^{\infty} o(h^4)dx$$

$$= (nh)^{-1}\|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4}\|f''(x)\|_2^2\alpha^2(K) + o(h^4) + o((nh)^{-1})$$

<u>Lampiran 2</u> Data pertumbuhan tanaman rami

- G1 : Giberelin 175 ppm
- G2 : Giberelin 200 ppm
- A1 : Kapasitas air penyiraman 300 ml
- A2 : Kapasitas air penyiraman 450 ml
- A3 : Kapasitas air penyiraman 600 ml

1. Data pertumbuhan jumlah tunas

Perlakuan	**Ulangan**	**Pengamatan Minggu Ke-**							
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
G1A1	1	1	1	1	1	2	3	3	3
	2	4	3	3	4	4	4	4	4
	3	5	4	4	3	3	1	1	1
G1A2	1	7	5	5	4	5	10	7	7
	2	10	11	8	8	7	4	4	4
	3	1	1	1	1	1	5	5	5
G1A3	1	9	11	7	6	3	6	3	3
	2	5	4	4	3	3	5	7	6
	3	5	4	4	3	4	5	6	6
G2A1	1	2	1	1	1	2	4	5	6
	2	1	1	1	1	1	1	1	1
	3	5	4	4	4	5	7	4	3
G2A2	1	7	7	5	2	2	2	3	4
	2	4	4	3	2	2	2	2	3
	3	2	1	2	1	1	2	2	2
G2A3	1	7	3	4	2	1	1	4	4

	2	11	10	11	7	7	8	8	8
	3	4	4	3	3	4	5	7	7

2. Data pertumbuhan jumlah daun

Perlakuan	Ulangan	Pengamatan Minggu Ke-							
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
G1A1	1	8	12	15	16	22	26	22	14
	2	24	24	29	31	31	16	0	0
	3	10	21	23	16	16	3	0	0
G1A2	1	27	31	33	32	36	49	31	19
	2	24	43	49	53	53	46	23	16
	3	5	10	13	14	14	25	16	23
G1A3	1	35	54	38	25	19	15	8	0
	2	24	30	33	24	25	22	25	23
	3	19	27	33	32	31	32	30	29
G2A1	1	7	11	13	13	17	29	32	28
	2	6	11	13	13	10	4	0	0
	3	24	25	31	31	36	29	8	3
G2A2	1	20	26	20	24	24	11	10	14
	2	17	26	28	25	28	21	11	11
	3	9	11	16	15	13	18	13	12
G2A3	1	27	22	26	14	11	4	8	7
	2	47	28	67	42	46	52	53	43
	3	13	19	19	22	21	34	30	33

3. Data pertumbuhan tinggi batang tunas (dalam cm)

Perlakuan	Ulangan	Pengamatan Minggu Ke-							
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
G1A1	1	2.5	7	10	11.5	7.5	6.9	8.17	9
	2	2	5.47	8.13	7.12	7.87	8.07	8.07	8.07
	3	0.36	1.73	3.05	3.83	3.87	11.1	11.1	11.1
G1A2	1	1.9	8.08	10.82	13.9	12.02	6.54	8.58	8.76
	2	0.94	2.64	5.63	6.9	8.74	15.82	15.87	16.2
	3	0.7	4.5	8.5	11	13.3	3.6	4.1	4.64
G1A3	1	1.33	2.33	4.52	5.72	10.76	0.38	0.57	0.57
	2	1.06	2.45	3.67	6.93	7.93	5.34	4.8	5.53
	3	1.28	3.67	4.97	5.27	5.07	3.14	3.22	3.47
G2A1	1	5.5	21.2	26.5	27.5	14.65	8.42	7.44	6.88
	2	2.5	8.5	12.5	14.5	16	16.2	16.2	16.2
	3	1.3	2.93	5.67	6.7	6.38	5	1.05	1.03
G2A2	1	0.73	1.9	3.78	14	15.85	16.1	7.3	5.65
	2	1.85	5.48	10.26	16.75	19	20	20.3	13.97
	3	2.8	13.5	8.7	18.2	18.6	10.3	12.2	13.35
G2A3	1	1.71	9.8	10.95	22.75	30	30.7	8.77	9.02
	2	1.03	2.8	4.21	6.9	7.01	6.72	7.39	7.69
	3	0.67	1.7	3.5	4.3	3.95	4.46	4.46	6

<u>Lampiran 3</u> Analisis data dengan *Minitab 13 for Windows*

1. Analisis data pertumbuhan tanaman rami variabel jumlah tunas minggu ke-8

General Linear Model: JmlhTunas versus Giberelin, Air

Analysis of Variance for JmlhTuna, using Adjusted SS for Tests

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Gibereli	1	2.722	2.722	2.722	0.60	0.454
Air	2	8.778	8.778	4.389	0.96	0.409
Gibereli*Air	2	6.778	6.778	3.389	0.74	0.496
Error	12	54.667	54.667	4.556		
Total	17	72.944				

2. Analisis data pertumbuhan tanaman rami variabel jumlah daun minggu ke-8

General Linear Model: JmlhDaun versus Giberelin, Air

Analysis of Variance for JmlhDaun, using Adjusted SS for Tests

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Gibereli	1	2.0	2.0	2.0	0.01	0.917
Air	2	317.4	317.4	158.7	0.90	0.434
Gibereli*Air	2	114.3	114.3	57.2	0.32	0.730
Error	12	2124.7	2124.7	177.1		
Total	17	2558.4				

3. Analisis data pertumbuhan tanaman rami variabel tinggi batang tunas minggu ke-8

General Linear Model: PjTunas versus Giberelin, Air

Analysis of Variance for PjTunas, using Adjusted SS for Tests

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Gibereli	1	0.17	0.17	0.17	0.00	0.956
Air	2	81.04	81.04	40.52	0.75	0.494
Gibereli*Air	2	196.35	196.35	98.17	1.81	0.205
Error	12	650.53	650.53	54.21		
Total	17	928.08				

<u>Lampiran 4</u> Program resampel bootstrap perhitungan rata-rata dan variansi sampel bootstrap

```
> n<-3
> B<-200
```

```
> data<-c(1,7,4)
> xstar<-matrix(sample(data,B*n,replace=T),B,n)
> samp.dist.mean<-apply(xstar,1,mean)
> jmlhtunas1<-samp.dist.mean
> mean(jmlhtunas1)
> var(jmlhtunas1)
```

<u>Lampiran 5</u> Program plot waktu optimal pertumbuhan tanaman rami berdasarkan rata-rata sampel bootstrap

```
> win.graph()
> par(mfrow=c(2,2))
> minggu<-c(1,2,3,4,5,6,7,8)
> mean<-c(1.97,5.32,7.72,8.59,9.88,9.86,9.37,9.52)
> plot(minggu,mean,main="",xlab="minggu",ylab="rata-
    rata",type="l",xlim=c(1,8),ylim=c(0,10))
> title(main="Waktu Optimal Jmlh Tunas G0A3")
```

<u>Lampiran 6</u> Program plot estimasi densitas kernel Epanechnikov

```
> win.graph()
> par(mfrow=c(3,3))
> jmlhtunas1
> plot(density(jmlhtunas1,bw=0.367,kernel=c("epanechnikov"),
  weight=NULL,window=kernel,n=200),main="",type="l",xlab=
  "jmlh_tunas",ylab="densitas",xlim=c(0,20),ylim=c(0,1))
> title(main="minggu 1")
```

<u>Lampiran 7</u> Program interval konfidensi bootstrap persentil

```
> bootlo<-quantile(jmlhtunas1,0.025)
> bootlo
> boothi<-quantile(jmlhtunas1,0.975)
> boothi
> range<-boothi-bootlo
> range
> cakupan<-sum(bootlo<jmlhtunas1&jmlhtunas1<boothi)/200
> cakupan
```

Lampiran 8 Gambar tanaman rami